דף נוסחאות

סטטיסטיקה תיאורית

סימנים בסיסיים לשימוש :

x'	אמצע הקבוצה	l	אורך האינטרוול
n	גודל המדגם	d	צפיפות האינטרוול
$\sum$	סכום אברים	$\bar{x}$	ממוצע
f F	שכיחות מוחלטת שכיחות מצטברת	Me, Q_1, Q_3 $Q_3 - Q_1$	חציון, רביעון התחתון, רביעון העליון התחום הבין - רביעוני
p cp	שכיחות מצטברת שכיחות יחסית מצטברת	Mo	השכיח
R	טווח	σ	סטיית תקן
z_i	ציון תקן	σ^2	שונות

מציאת טווח: $R = x_{max} - x_{min}$

מציאת x' : $x' = \dfrac{\text{הגבול העליון של הקבוצה + הגבול התחתון של הקבוצה}}{2}$

מציאת p - שכיחות יחסית: $p = \dfrac{f}{N}$

מציאת שכיח : ערך המשתנה שהשכיחות שלו גבוהה ביותר.

מציאת חציון: מציאת חציון לטבלה של ערכים בודדים ולטבלת שכיחות:

אם n אי-זוגי $Me = x_{\frac{n+1}{2}}$, אם n זוגי $Me = \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

בלטבלה שכיחויות (k – מספר מחלקות):

$$d_i = \frac{f_i}{l_i},$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i' \cdot f_i = \sum_{i=1}^{k} x_i' \cdot P_i$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum f_i \cdot \left(x_i' - \bar{x}\right)^2 = \sum P_i \cdot \left(x_i' - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum f_i \cdot x_i'^2 - (\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i')^2 \cdot p_i - (\bar{x})^2$$

$$M_0 = L_i + \frac{d_i - d_{i-1}}{\left(d_i - d_{i-1}\right) + \left(d_i - d_{i+1}\right)} \cdot l_i$$

L_i - גבול תחתון של קבוצת השכיח i - קבוצת השכיח (לפי הצפיפות המכסימלית)

$$M_e = L_i + \frac{l_i}{f_i} \times \left(\frac{n}{2} - F_{i-1}\right)$$

L_i - גבול תחתון של קבוצת החציון i - קבוצת החציון (הקבוצה הראשונה שבה $F_i \ge \frac{n}{2}$)

$$Q_1 = L_i + \frac{l_i}{f_i} \times \left(\frac{n}{4} - F_{i-1}\right); \quad Q_3 = L_i + \frac{l_i}{f_i} \times \left(\frac{3n}{4} - F_{i-1}\right);$$

L_i - גבול תחתון של קבוצת הרביעון i - קבוצת הרביעון (הקבוצה הראשונה שבה $F_i \ge \frac{n}{4}$ or $F_i \ge \frac{3n}{4}$)

$$z_i = \frac{x_i' - \bar{x}}{\sigma}$$

התפלגות נורמלית $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

X הוא משתנה נורמלי עם פרמטרים μ ו- σ, סימונים: $E(X)=\mu$, $Var(X)=\sigma^2$.

אם $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ אזי $Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

פונקצית התפלגות המצטברת של X היא

$$F(t)=P(X \le t)=\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

כאשר $\Phi(\alpha)=P(Z \le \alpha)$ היא פונקצית ההתפלגות המצטברת של המשתנה הנורמלי הסטנדרטי והיא נתונה בטבלה. תכונות של פונקצית $\Phi(\alpha)$:

$$P(a \le z \le b)=\Phi(b)-\Phi(a)\ \ ,P(-a \le z \le a)=2\Phi(a)-1,\ P(z>a)=1-\Phi(a)$$

$$\Phi(-a)=1-\Phi(a)\ ,\ \ z_\alpha=-z_{1-\alpha}$$

סכום והפרש התפלגויות נורמליות

יהיו X ו- Y משתנים מקריים נורמליים בלתי תלויים כך ש: $X \sim N(\mu_x,\sigma_x^2); Y \sim N(\mu_y,\sigma_y^2)$

אזי מתקיים: $X \pm Y \sim N(\mu_x \pm \mu_y, \sigma_x^2+\sigma_y^2)$

משפט הגבול המרכזי

יהיו $X_1,\ldots,X_n$ - משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות זהה שתוחלתה μ ושונותה σ^2 אזי

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\cdot\mu, n\cdot\sigma^2)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le t\right)=\Phi\left(\frac{t-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$ כאשר X רציף

או $$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le k\right)=\Phi\left(\frac{k+1/2-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$ כאשר X בדיד ומקבל ערכים שלמים $X=1,2,\ldots$

$$\bar{X} \sim N(\mu,\sigma^2/n)$$ או $$P\left(\bar{X} \le t\right)=\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

קירוב נורמלי למשתנה בינומי

יהי X משתנה בינומי בעל פרמטרים n ו- p כלומר $X \sim Bin(n,p)$, אזי עבור n מספיק גדול $(n>30)$ מתקיים:

$$X \sim N(np, np(1-p));\ P(X \le k)=\Phi\left(\frac{k+1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_x-\mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}\right);\ P(\bar{X}-\bar{Y} \le t)=\Phi\left(\frac{t-(\mu_x-\mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}}\right)$$

רווח בר- סמך

רווח בר- סמך לממוצע כאשר סטיית התקן ידועה

μ - ממוצע האוכלוסייה, σ^2 - שונות האוכלוסייה, σ - סטיית התקן של האוכלוסייה.

$\bar{x}$ - ממוצע המדגם, α - רמת המובהקות, $1-\alpha$ רמת הביטחון, n - גודל המדגם

רווח בר-סמך ל- μ : $\Phi\left(z_{1-\alpha/2}\right)=1-\frac{\alpha}{2}$; $\bar{x}-\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{x}+\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$

גודל המדגם הדרוש כדי שברמת בטחון $1-\alpha$, הסטייה בין μ לבין $\bar{X}$ לא תעלה על $\varepsilon=\frac{z_{1-\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$ הוא:

$$n\ge\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\sigma}{\varepsilon}\right)^2$$

רווח בר- סמך לממוצע כאשר סטיית התקן אינה ידועה

$\hat{S}^2$- השונות המתוקנת של המדגם, $\hat{S}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$, $\hat{S}$ - סטיית התקן המתוקנת של המדגם.

$\hat{S}^2=\frac{n}{n-1}S^2$ כאשר $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$

רווח בר-סמך עבור התוחלת μ : $\bar{x}-t_{1-\alpha/2,n-1}\hat{S}/\sqrt{n}\le\mu\le\bar{x}+t_{1-\alpha/2,n-1}\hat{S}/\sqrt{n}$

רווח בר- סמך לפרופורציות

רווח בר-סמך עבור פרופורציה p : $\hat{p}-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\le p\le\hat{p}+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

כאשר $\hat{p}=\frac{x}{n}$ היא פרופורציית ה"הצלחות" במדגם בגודל n

אם ידוע בוודאות ש - $p<\hat{p}<0.5$ או $p>\hat{p}>0.5$ אזי

גודל המדגם המבטיח שברמת סמך $1-\alpha$ הסטייה בין p לבין $\hat{p}$ לא תעלה על $\varepsilon=z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

והוא: $n\ge\frac{z^2_{1-\alpha/2}\hat{p}(1-\hat{p})}{\varepsilon^2}$ כאשר $\hat{p}$ הוא הערך הקרוב ביותר ל-p שיכול להתקבל.

אם p לא ידוע אזי מתקיים: $n\ge\left(\frac{z_{1-\alpha/2}}{2\varepsilon}\right)^2$

רווח בר סמך להפרש ממוצעי שתי אוכלוסיות כאשר שתי השונויות σ_x^2,σ_y^2 ידועות

$$|\bar{X}-\bar{Y}|-Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}\le\mu_x-\mu_y\le|\bar{X}-\bar{Y}|+Z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x}+\frac{\sigma_y^2}{n_y}}$$

<u>בדיקת השערות לממוצע כאשר סטיית התקן ידועה</u>

נתון מדגם בגודל n מהתפלגות נורמלית $N(\mu,\sigma^2)$, בעלת שונות ידועה.

H_0 - השערת האפס.

H_1 - השערה האלטרנטיבית, וזוהי בדרך כלל השערת החוקר.

מבחן	**חד-כיווני ימני**	**דו-כיווני**	**חד-כיווני שמאלי**
השערות	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$
הערכים הקריטיים	$C_2 = \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \sigma / \sqrt{n}$	$C_1 = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma / \sqrt{n}$ $C_2 = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma / \sqrt{n}$	$C_1 = \mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \sigma / \sqrt{n}$
אזור דחיית H_0	$\overline{X} > C_2$	$\overline{X} < C_1$ או $\overline{X} > C_2$	$\overline{X} < C_1$
מובהקות התוצאה (P-value)	$P_{value} = 1 - \Phi\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$	$P_{value} = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert}{\sigma / \sqrt{n}}\right)\right]$	$P_{value} = \Phi\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$
אזור דחיית H_0	$P_{value} < \alpha$	$P_{value} < \alpha$	$P_{value} < \alpha$
מבחן Z	$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$Z = \frac{\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert}{\sigma / \sqrt{n}}$	$Z = \frac{\lvert\overline{X} - \mu_0\rvert}{\sigma / \sqrt{n}}$
אזור דהיית H_0	$Z > z_{1-\alpha}(table)$	$Z > z_{1-\alpha/2}(table)$	$Z > z_{1-\alpha}(table)$
רמת המובהקות	$\alpha = 1 - \Phi\left(\frac{C_2 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$		$\alpha = \Phi\left(\frac{C_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$
טעות מסוג שני עבור $H_1 : \mu = \mu_1$	$\beta = \Phi\left(\frac{C_2 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$		$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{C_1 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$
עוצמת המבחן עבור $H_1 : \mu = \mu_1$	$\pi = 1 - \beta = 1 - \Phi\left(\frac{C_2 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$		$\pi = 1 - \beta = \Phi\left(\frac{C_1 - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$

בדיקת השערות לממוצע כאשר סטיית התקן לא ידועה

נתון מדגם בגודל $n \geq 30$ או $n < 30$ והתפלגות נורמלית, בעלת אומדן לשונות $\hat{S}^2$.

מבחן	חד-כיוני ימני	דו-כיוני	חד-כיוני שמאלי
השערות	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$
הערכים הקריטיים	$C_2 = \mu_0 + t_{1-\alpha,n-1} \cdot \hat{S} / \sqrt{n}$	$C_1 = \mu_0 - t_{1-\alpha/2,n-1} \cdot \hat{S} / \sqrt{n}$ $C_2 = \mu_0 + t_{1-\alpha/2,n-1} \cdot \hat{S} / \sqrt{n}$	$C_1 = \mu_0 - t_{1-\alpha,n-1} \cdot \hat{S} / \sqrt{n}$
אזור דהיית H_0	$\overline{X} > C_2$	$\overline{X} < C_1$ או $\overline{X} > C_2$	$\overline{X} < C_1$
מבחן T	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\hat{S} / \sqrt{n}}$	$T = \dfrac{\left\lvert \overline{X} - \mu_0 \right\rvert}{\hat{S} / \sqrt{n}}$	$T = \dfrac{\left\lvert \overline{X} - \mu_0 \right\rvert}{\hat{S} / \sqrt{n}}$
אזור דהיית H_0	$T > t_{1-\alpha,n-1}(table)$	$T > t_{1-\alpha/2,n-1}(table)$	$T > t_{1-\alpha,n-1}(table)$

בדיקת השערות להפרש ממוצעי שתי אוכלוסיות כאשר שתי השונויות σ_x^2, σ_y^2 ידועות

מבחן	חד-כיוני ימני	דו-כיוני	חד-כיוני שמאלי
השערות	$H_0 : \mu_x - \mu_y = \mu_0$ $H_1 : \mu_x - \mu_y > \mu_0$	$H_0 : \mu_x - \mu_y = \mu_0$ $H_1 : \mu_x - \mu_y \neq \mu_0$	$H_0 : \mu_x - \mu_y = \mu_0$ $H_1 : \mu_x - \mu_y < \mu_0$
הערכים הקריטיים	$C_2 = \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}$	$C_1 = \mu_0 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}$ $C_2 = \mu_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}$	$C_1 = \mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}$
אזור דחיית H_0	$\overline{X} - \overline{Y} > C_2$	$\overline{X} - \overline{Y} < C_1$ או $\overline{X} - \overline{Y} > C_2$	$\overline{X} - \overline{Y} < C_1$
מובהקות התוצאה (P-value)	$P_{value} = 1 - \Phi\left(\dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}}\right)$	$P_{value} = 2\left[1 - \Phi\left(\dfrac{\left\lvert \overline{X} - \overline{Y} - \mu_0 \right\rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}}\right)\right]$	$P_{value} = \Phi\left(\dfrac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_0}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}}\right)$
אזור דחיית H_0	$P_{value} < \alpha$	$P_{value} < \alpha$	$P_{value} < \alpha$
מבחן Z	$Z = \dfrac{\left\lvert \overline{X} - \overline{Y} - \mu_0 \right\rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}}$	$Z = \dfrac{\left\lvert \left\lvert \overline{X} - \overline{Y} \right\rvert - \mu_0 \right\rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}}$	$Z = \dfrac{\left\lvert \left\lvert \overline{X} - \overline{Y} \right\rvert - \mu_0 \right\rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_x^2}{n_x} + \dfrac{\sigma_y^2}{n_y}}}$
אזור דהיית H_0	$Z > z_{1-\alpha}(table)$	$Z > z_{1-\alpha/2}(table)$	$Z > z_{1-\alpha}(table)$

<u>בדיקת השערות לפרופורציות</u>

מבחן	חד-כיווני ימני	דו-כיווני	חד-כיווני שמאלי
השערות	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$
הערכים הקריטיים	$C_2 = p_0 + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$C_1 = p_0 - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$ $C_2 = p_0 + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$C_1 = p_0 - z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$
אזור דחיית H_0	$\hat{p} > C_2$	$\hat{p} < C_1$ או $\hat{p} > C_2$	$\hat{p} < C_1$
מובהקות התוצאה (P-value)	$P_{value} = 1 - \Phi\left(\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right)$	$P_{value} = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\lvert\hat{p} - p_0\rvert}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right)\right]$	$P_{value} = \Phi\left(\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right)$
אזור דחיית H_0	$P_{value} < \alpha$	$P_{value} < \alpha$	$P_{value} < \alpha$
מבחן Z	$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$Z = \frac{\lvert\hat{p} - p_0\rvert}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$Z = \frac{\lvert\hat{p} - p_0\rvert}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$
אזור דהיית H_0	$Z > z_{1-\alpha}(table)$	$Z > z_{1-\alpha/2}(table)$	$Z > z_{1-\alpha}(table)$
טעות מסוג ראשון (רמת המובהקות)	$\alpha = 1 - \Phi\left(\frac{C_2 - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right)$		$\alpha = \Phi\left(\frac{C_1 - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}\right)$
טעות מסוג שני עבור $H_1 : \mu = \mu_1$	$\beta = \Phi\left(\frac{C_2 - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}}\right)$		$\beta = 1 - \Phi\left(\frac{C_1 - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}}\right)$
עוצמת המבחן עבור $H_1 : \mu = \mu_1$	$\pi = 1 - \Phi\left(\frac{C_2 - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}}\right)$		$\pi = \Phi\left(\frac{C_1 - p_1}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}}\right)$

<u>בדיקת השערות ל-2 מדגמים בלתי תלויים כאשר σ_1^2 ו- σ_2^2 אינן ידועות</u>

מבחן T למדגמים בלתי תלויים על הפרש ממוצעים $\left(\mu_1-\mu_2\right)$ כאשר σ_1^2 ו- σ_2^2 אינן ידועות

$$\hat{S}_p^2=\frac{\sum\left(x-\bar{x}\right)^2+\sum\left(y-\bar{y}\right)^2}{n_x+n_y-2} \quad \text{או} \quad \hat{S}_p^2=\frac{(n_x-1)\hat{S}_x^2+(n_y-1)\hat{S}_y^2}{n_x+n_y-2}$$

כאשר $\hat{S}_x^2$ ו- $\hat{S}_y^2$ הין שונויות ממדגמים.

מספר דרגות חופש ל- $t_{1-\alpha,df}$ או $t_{1-\alpha/2,df}$

$$df=n_x+n_y-2$$

הערך המחושב של המבחן הוא t :

$$T_{\text{מבחן}}=\frac{\left|\bar{X}-\bar{Y}\right|}{\sqrt{\hat{S}_p^2/n_x+\hat{S}_p^2/n_y}}$$

<u>מבחן</u> T <u>למדגמים תלויים</u> (מדגמים מזווגים – למדגמים תלויים נתייחס כאילו מדובר במדגם אחד)

- **ההפרשים**: $d_i=x_i-y_i$
- **ממוצע ההפרשים:** $\bar{\mathrm{d}}=\frac{\sum \mathrm{d_i}}{\mathrm{n}}$ או $\bar{\mathrm{d}}=\bar{\mathrm{x}}-\bar{\mathrm{y}}$
- **שגיאת התקן של ההפרשים** $\hat{\mathrm{S}}_{\mathrm{d}}=\sqrt{\frac{\sum\left(\mathrm{d_i}-\bar{\mathrm{d}}\right)^2}{\mathrm{n}-1}}$
- **הערך המחושב של המבחן הוא** : $t_{mivhan}=\frac{\bar{d}}{(\hat{S}_d/\sqrt{n})}$
- df **"מספר דרגות חופש"**: $\mathrm{df}=\mathrm{n}-1$

מקדם המתאם וקווי רגרסיה

מתאם פירסון (Pearson)
כאשר שני משתנים גם X וגם Y בסולם רווח או מנה

$$\rho = \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

כאשר,

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}, \; S_Y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}{n}}, \; S_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{n}$$

מתאם ספירמן (Spearman rank correlation)
כאשר לפחות אחד ממשתנים X או Y בסולם סדורי או שמי

$$r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

בדיקת השערות למקדם מתאם

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

$$T_{test} = |\rho_0| \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-\rho_0^2}}$$

$$T_{test} > t_{1-\alpha, n-2}(table)$$

קו הרגרסיה לניבוי *y* לפי *x* : $\hat{Y} = a + bX$
כאשר,

$$b = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \rho \frac{S_y}{S_x}$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} = \overline{Y} - \frac{S_{xy}}{S_x^2}\overline{X}$$

בדיקת השערות לטיב התאמה ולאי-תלות בעזרת התפלגות חי-בריבוע χ^2

$H_0 : p_i = p_{i0} \qquad (i = 1, \ldots, k)$

H_1 : לא כך

O_i - השכיחות שהתקבלה במדגם בקטגוריה i, (Objected)

$E_i = nP_{i0}$ - השכיחות המצופה (המיוחלת) בהנחה כי H_0 נכונה (Expected)

$$\chi^2_{מבחן} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

אזור דחיית H_0 : $\chi^2_{מבחן} > \chi^2_{1-\alpha, df}$

df - "דרגות חופש" למבחן χ^2

לטיב התאמה $df=k-1$

לאי-תלות בלוח שכיחות $df = (r-1)\cdot(c-1)$ r - מס' שורות, c - מס' עמודות,

ניתוח שונות (ANOVA)

ניתוח שונות (חד כיווני) הוא מבחן להשוואת תוחלות $(\mu_1 ... \mu_k)$ של k אוכלוסיות שונות.

לכן, בניתוח שונות, השערות המחקר הן :

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$ (התוחלות של כל האוכלוסיות שוות)

$H_1 :$ אחרת (לפחות שתיים מהתוחלות שונות)

ההנחות הדרושות לביצוע התהליך:

1) בכל אוכלוסייה מתוך k האוכלוסיות ההתפלגות נורמלית.
2) כל האוכלוסיות הן עם אותה שונות σ^2.
3) המדגמים בלתי תלויים זה בזה.

ישנו משתנה המבדיל בין הקבוצות השונות, הוא המשתנה הבלתי תלוי הנקרא גורם (factor). משתנה זה הוא קטגוריאלי עם k רמות (levels).

כדי לבצע את התהליך יש לבצע מדגם מכל אוכלוסייה :

נסמן ב- n_i את גודל המדגם בקבוצה i.

$n = \sum_{1}^{k} n_i$ - מספר התצפיות סך הכול (בכל המדגמים).

$\overline{X}_1$ - ממוצע המדגם הראשון,.......,$\overline{X}_k$ -ממוצע המדגם ה- k -י.

$\overline{X}$ - ממוצע כללי (של כל המדגמים).

סכום ריבועים בין הכבותות: $SSB = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2$

סכום ריבועים בתוך הכבותות: $SSW = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_j} \left(x_{ij} - \overline{X}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)\cdot \hat{S}_i^2$

סכום ריבועים כללי: $SST = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_j} \left(x_{ij} - \overline{X}\right)^2$

$$SST = SSB + SSW$$

F	ממוצע הריבועים MS	דרגות חופש df	סכום הריבועים SS	מקור השונות
$\frac{MSB}{MSW}$	$\frac{SSB}{k-1}$	$k-1$	SSB	**בין הקבוצות -** B
	$\frac{SSW}{n-k}$	$n-k$	SSW	**בתוך הקבוצות -** W
		$n-1$	SST	**סה"כ -** T

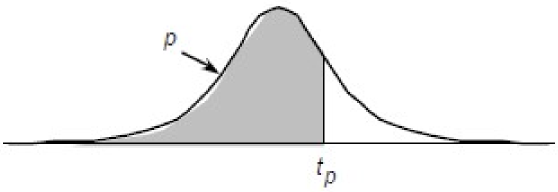
$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSW}{n-k}} \sim F\left(k-1, n-k\right)$$

אזור דחיית H_0 : $F > F_{(k-1,n-k)}:1-\alpha$

Table 1: Table of the Standard Normal Cumulative Distribution Function $\Phi(z)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

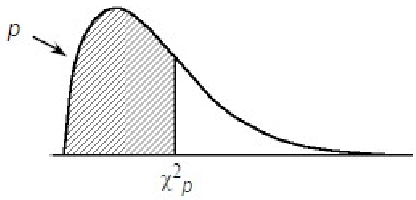
טבלת התפלגות t של סטודנט – ערכי החלוקה t_p



P

דרגות חופש	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.709	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

טבלת התפלגות חי-בריבוע – ערכי החלוקה χ^2_p



p

דח	.005	.01	.025	.05	.10	.25	.50	.75	.90	.95	.975	.99	.995
1			0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

טבלת התפלגות F עבור $\alpha = 0.05$

df2/df1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	INF
1	161.448	199.5	215.707	224.583	230.162	233.99	236.768	238.883	240.543	241.882	243.91	245.95	248.013	249.052	250.095	251.143	252.196	253.253	254.314
2	18.5128	19	19.1643	19.2468	19.2964	19.33	19.3532	19.371	19.3848	19.3959	19.413	19.4291	19.4458	19.4541	19.4624	19.4707	19.4791	19.4874	19.4957
3	10.128	9.552	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7446	8.7029	8.6602	8.6385	8.6166	8.5944	8.572	8.5494	8.5264
4	7.7086	6.944	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.041	5.9988	5.9644	5.9117	5.8578	5.8025	5.7744	5.7459	5.717	5.6877	5.6581	5.6281
5	6.6079	5.786	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.6777	4.6188	4.5581	4.5272	4.4957	4.4638	4.4314	4.3985	4.365
6	5.9874	5.143	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.099	4.06	3.9999	3.9381	3.8742	3.8415	3.8082	3.7743	3.7398	3.7047	3.6689
7	5.5914	4.737	4.3468	4.1203	3.9715	3.866	3.787	3.7257	3.6767	3.6365	3.5747	3.5107	3.4445	3.4105	3.3758	3.3404	3.3043	3.2674	3.2298
8	5.3177	4.459	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.2839	3.2184	3.1503	3.1152	3.0794	3.0428	3.0053	2.9669	2.9276
9	5.1174	4.257	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.0729	3.0061	2.9365	2.9005	2.8637	2.8259	2.7872	2.7475	2.7067
10	4.9646	4.103	3.7083	3.478	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.913	2.845	2.774	2.7372	2.6996	2.6609	2.6211	2.5801	2.5379
11	4.8443	3.982	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.948	2.8962	2.8536	2.7876	2.7186	2.6464	2.609	2.5705	2.5309	2.4901	2.448	2.4045
12	4.7472	3.885	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.6866	2.6169	2.5436	2.5055	2.4663	2.4259	2.3842	2.341	2.2962
13	4.6672	3.806	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.671	2.6037	2.5331	2.4589	2.4202	2.3803	2.3392	2.2966	2.2524	2.2064
14	4.6001	3.739	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5342	2.463	2.3879	2.3487	2.3082	2.2664	2.2229	2.1778	2.1307
15	4.5431	3.682	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.4753	2.4034	2.3275	2.2878	2.2468	2.2043	2.1601	2.1141	2.0658
16	4.494	3.634	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4247	2.3522	2.2756	2.2354	2.1938	2.1507	2.1058	2.0589	2.0096
17	4.4513	3.592	3.1968	2.9647	2.81	2.6987	2.6143	2.548	2.4943	2.4499	2.3807	2.3077	2.2304	2.1898	2.1477	2.104	2.0584	2.0107	1.9604
18	4.4139	3.555	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3421	2.2686	2.1906	2.1497	2.1071	2.0629	2.0166	1.9681	1.9168
19	4.3807	3.522	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	2.308	2.2341	2.1555	2.1141	2.0712	2.0264	1.9795	1.9302	1.878
20	4.3512	3.493	3.0984	2.8661	2.7109	2.599	2.514	2.4471	2.3928	2.3479	2.2776	2.2033	2.1242	2.0825	2.0391	1.9938	1.9464	1.8963	1.8432
21	4.3248	3.467	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.366	2.321	2.2504	2.1757	2.096	2.054	2.0102	1.9645	1.9165	1.8657	1.8117
22	4.3009	3.443	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	2.2258	2.1508	2.0707	2.0283	1.9842	1.938	1.8894	1.838	1.7831
23	4.2793	3.422	3.028	2.7955	2.64	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	2.2036	2.1282	2.0476	2.005	1.9605	1.9139	1.8648	1.8128	1.757
24	4.2597	3.403	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	2.1834	2.1077	2.0267	1.9838	1.939	1.892	1.8424	1.7896	1.733
25	4.2417	3.385	2.9912	2.7587	2.603	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	2.1649	2.0889	2.0075	1.9643	1.9192	1.8718	1.8217	1.7684	1.711
26	4.2252	3.369	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	2.1479	2.0716	1.9898	1.9464	1.901	1.8533	1.8027	1.7488	1.6906
27	4.21	3.354	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	2.1323	2.0558	1.9736	1.9299	1.8842	1.8361	1.7851	1.7306	1.6717
28	4.196	3.34	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.236	2.19	2.1179	2.0411	1.9586	1.9147	1.8687	1.8203	1.7689	1.7138	1.6541
29	4.183	3.328	2.934	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229	2.1768	2.1045	2.0275	1.9446	1.9005	1.8543	1.8055	1.7537	1.6981	1.6376
30	4.1709	3.316	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	2.0921	2.0148	1.9317	1.8874	1.8409	1.7918	1.7396	1.6835	1.6223
40	4.0847	3.232	2.8387	2.606	2.4495	2.3359	2.249	2.1802	2.124	2.0772	2.0035	1.9245	1.8389	1.7929	1.7444	1.6928	1.6373	1.5766	1.5089
60	4.0012	3.15	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.097	2.0401	1.9926	1.9174	1.8364	1.748	1.7001	1.6491	1.5943	1.5343	1.4673	1.3893
120	3.9201	3.072	2.6802	2.4472	2.2899	2.175	2.0868	2.0164	1.9588	1.9105	1.8337	1.7505	1.6587	1.6084	1.5543	1.4952	1.429	1.3519	1.2539
inf	3.8415	2.996	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799	1.8307	1.7522	1.6664	1.5705	1.5173	1.4591	1.394	1.318	1.2214	1