טורי פורייה

1. מבוא

יהיו

$\bar{x} \in \mathbf{R}^3, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \in \mathbf{R}^3$,

כאשר $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \in \mathbf{R}^3$ הם שלוה וקטורים אורתוגונליים (מאונכים) זה לזה, ז"א

$(\bar{a}_1, \bar{a}_2) = 0, (\bar{a}_1, \bar{a}_3) = 0, (\bar{a}_2, \bar{a}_3) = 0$.

מתקיים

$\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3$,

כאשר x_1, x_2, x_3 הן קואורדינאטות של הווקטור $\bar{x}$ לפי הבסיס $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$.

נחפש את x_1, x_2, x_3 .

מתקיים:

$$\begin{aligned} &\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\bar{x}, \bar{a}_1) = (x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + x_3\bar{a}_3, \bar{a}_1) = \\ &= x_1(\bar{a}_1, \bar{a}_1) + x_2(\bar{a}_2, \bar{a}_1) + x_3(\bar{a}_3, \bar{a}_1) = \\ &= x_1|\bar{a}_1|^2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{|a_1|^2}(\bar{x}, \bar{a}_1) \end{aligned}$$

באותה דרך מקבלים: $x_2 = \frac{1}{|\bar{a}_2|^2}(\bar{x}, \bar{a}_2), x_3 = \frac{1}{|a_3|^2}(\bar{x}, \bar{a}_3)$.

קבלנו, שהמקדמים x_1, x_2, x_3 של הפיתוח של הווקטור $\bar{x}$ לצירוף ליניארי של הווקטורים $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$, אורטוגונאליים זה לזה, הם

$$x_1 = \frac{1}{|a_1|^2}(\bar{x}, \bar{a}_1), x_2 = \frac{1}{|a_2|^2}(\bar{x}, \bar{a}_2), x_3 = \frac{1}{|a_3|^2}(\bar{x}, \bar{a}_3) , \qquad (0.1)$$

ופיתוח של של הווקטור $\bar{x}$ לצירוף ליניארי של הווקטורים $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ מתקבל על-ידי:

$$\bar{x} = \left(\frac{1}{|a_1|^2}(\bar{x}, \bar{a}_1)\right)\bar{a}_1 + \left(\frac{1}{|a_2|^2}(\bar{x}, \bar{a}_2)\right)\bar{a}_2 + \left(\frac{1}{|a_3|^2}(\bar{x}, \bar{a}_3)\right)\bar{a}_3 \qquad (0.2)$$

1.1. תזכורת למושגי אורתוגונאליות, אורטונורמאליות ,נורמה

הגדרה 1.

שתי פונקציות $f(x), g(x), x \in [a,b]$ אינטגרביליות נקראות פונקציות אורתוגונאליות (בקטע $[a,b]$) אם

מתקיים: $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

הגדרה 2.

האינטגרל $\int_a^b f(x)g(x)dx$ נקרא מכפלה סקלרית של הפונקציות $f(x), g(x), x \in [a,b]$.

סימן של מכפלה סקלרית

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

הגדרה 3.

שורש של המכפלה הסקלרית של הפונקציה $f(x), x \in [a,b]$ לעצמה נקרא נורמה של הפונקציה $f(x)$.

סימון של נורמה:

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

הגדרה 4 .

סידרת פונקציות $f_n(x), x \in [a,b], n = 1,2,...,\infty$ נקראת **סידרה אורתוגונאלית** (בקטע $[a,b]$), אם כל שתי פונקציות מהסדרה הזאת הן פונקציות אורטוגונאליות זו לזו, כלומר,

$$(f_n, f_m) = \int_a^b f_n(x)f_m(x)dx = 0, \forall n,m = 1,2,..., n \neq m \quad (1)$$

הגדרה 5 .

סידרת פונקציות $f_n(x), x \in [a,b], n = 1,2,...,\infty$ נקראת **סידרה אורטונורמאלית**, אם:

1) הסדרה הזאת היא סידרה אורתוגונאלית על פי הגדרה 4,
2) נורמה של כל פונקציה הסדרה הזאת שווה ל-1, כלומר,

$$\|f_n\| = \sqrt{(f_n, f_n)} = \sqrt{\int_a^b f_n^2(x)dx} = 1, n = 1,2,..,. \quad (2)$$

לא כל סדרה אורתוגונאלית היא גם סדרה אורטונורמאלית, אבל מכל סידרה אורתוגונאלית אפשר לבנות סידרה אורטונורמאלית., כלומר,

אם הסדרה $f_n(x), x \in [a,b], n = 1,2,...,\infty$ היא אורתוגונאלית, אזי הסדרה

$g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{\|f_n\|}, x \in [a,b], n = 1,2,...,\infty$ היא **סידרה** אורתונורמאלית.

דוגמה 1.

א) בדוק, האם הסדרה

$$f_n(x) = \sin nx, x \in [0,\pi], n = 1,2,... \quad (3)$$

היא סידרה אורטוגואנלית (בקטע $[0,\pi]$).

ב) חשב $\|\sin nx\|, n = 1, 2, ...,$.

פתרון.

א) $n \neq m$:

$$\int_0^{\pi}\sin nx\sin mx dx=\int_0^{\pi}\frac{\cos(n-m)x-\cos(n+m)x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(n-m)xdx-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(n+m)xdx=\frac{1}{2}\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\frac{\sin(n+m)x}{n+m}\Bigg|_0^{\pi}=0 .$$

מש"ל

ב) $n=m$:

$$\int_0^{\pi}\sin nx\sin nx dx=\int_0^{\pi}\sin^2 nx dx==\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2nx)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2} ,$$

ז"א $\|\sin nx\|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

דוגמה 2.

א) בדוק, האם הסדרה

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\dots,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\dots,\ x\in[-l,l],\ n=0,1,2,\dots \qquad (4)$$

היא סידרה אורטוגואנלית (בקטע $[-l,l]$).

ב) חשב $\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|,\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|,\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|,n=1,2,\dots,$.

פתרון.

1)אורטוגונליות של סינוסים:

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\int_{-l}^{l}\frac{\cos(n-m)\frac{\pi x}{l}-\cos(n+m)\frac{\pi x}{l}}{2}dx=$$

$$.=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos(n-m)\frac{\pi x}{l}dx-\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos(n+m)\frac{\pi x}{l}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{(n-m)\pi x}{l}}{\frac{(n-m)\pi}{l}}\Bigg|_{-l}^{l}-\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{(n+m)\pi x}{l}}{\frac{(n+m)\pi}{l}}\Bigg|_{-l}^{l}=0,n\neq m;n,m=1,2,\dots,$$

2) אורטוגונליות של כוסינוסים:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=\int_{-l}^{l}\frac{\cos(n-m)\frac{\pi x}{l}+\cos(n+m)\frac{\pi x}{l}}{2}\,dx=$$

$$.=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos(n-m)\frac{\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\cos(n+m)\frac{\pi x}{l}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left.\frac{\sin\frac{(n-m)\pi x}{l}}{\frac{(n-m)\pi}{l}}\right|_{-l}^{l}+\frac{1}{2}\left.\frac{\sin\frac{(n+m)\pi x}{l}}{\frac{(n+m)\pi}{l}}\right|_{-l}^{l}=0,n\neq m;\ n,m=1,2,...,$$

3) אורטוגונליות של כוסינוסים וסינוסים:

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=\int_{-l}^{l}\frac{\sin(n-m)\frac{\pi x}{l}+\sin(n+m)\frac{\pi x}{l}}{2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin(n-m)\frac{\pi x}{l}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin(n+m)\frac{\pi x}{l}\,dx=$$

$$.=-\frac{1}{2}\left.\frac{\cos\frac{(n-m)\pi x}{l}}{\frac{(n-m)\pi}{l}}\right|_{-l}^{l}-\frac{1}{2}\left.\frac{\cos\frac{(n+m)\pi x}{l}}{\frac{(n+m)\pi}{l}}\right|_{-l}^{l}=0,n\neq m;\ n,m=1,2,...;$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{2n\pi x}{l}\,dx=-\frac{1}{2}\cos\left.\frac{2n\pi x}{l}\right|_{-l}^{l}=0,n=1,2,...$$

4) אורטוגונליות של $\frac{1}{\sqrt{2}}$ וסינוסים:

$$.\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left.\cos\frac{n\pi x}{l}\right|_{-l}^{l}}{\frac{n\pi}{l}}=0,n=1,2,...,$$

אורטוגונליות של $\frac{1}{\sqrt{2}}$ וכוסינוסים:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left.\sin\frac{n\pi x}{l}\right|_{-l}^{l}}{\frac{n\pi}{l}}=0, n=1,2,...,$$

ב) מציאת נורמות:

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx=$$

$$=l-\left.\frac{\sin\frac{2n\pi x}{l}}{\frac{2n\pi x}{l}}\right|_{-l}^{l}=l\Leftrightarrow\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l};$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx=$$

$$=l+\left.\frac{\sin\frac{2n\pi x}{l}}{\frac{2n\pi x}{l}}\right|_{-l}^{l}=l\Leftrightarrow\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|=\sqrt{l};$$

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}dx=l\Leftrightarrow\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|=\sqrt{l}.$$

מש"ל.

2. פתוח לטור פורייה

נתבונן בסדרה טריגונומטרית (4).

הגדרה 5 .

תהי $f(x), x\in[-l,l]$-ו, פונקציה אינטגראבילית .

הטור

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right), x\in[-l,l] \qquad (5)$$

כאשר

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, n=0,1,2,...,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, n=1,2,..., \qquad (6)$$

נקרא **טור פורייה** של הפונקציה $f(x)$ בקטע $[-l,l]$.

הגדרה 6 .

המקדמים $a_n, n=0,1,2,...,$ ו- $b_n, n=1,2,...,$ מוגדרים על-יד הנוסחאות (6), נקראות **מקדמי פורייה** של הפונקציה $f(x)$. הנוסחאות (6) עצמן נקראות **נוסחאות פורייה.**

הגדרה 7 .

סכומים חלקיים של טור פורייה (5) נקראים סכומים חלקיים של הפונקציה $f(x)$.

2.1. התכנסות של טורי פורייה

כדי להדגיש, שטור פורייה (5) נוצר על-ידי הפונקציה $f(x), x\in[-l,l]$ (ז"א, המקדמים $a_n, n=0,1,2,...,$ ו- $b_n, n=1,2,...,$ מתקבלים על-ידי (6), רושמים

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right), x\in[-l,l] \qquad (7)$$

טור פורייה של הפונקציה $f(x), x\in[-l,l]$ לחייב להתכנס לה.

שאלת ההתכנסות של טור פורייה (7) בימתיים פתוחה.

הגדרה 8 .

הפונקציה $f(x), x\in[-l,l]$ נקראת פונקציה **רציפה למקוטעין,** אם יש לכל היותר מספר סופי של נקודות אי- רציפות ואם, בנוסף לזה, בכל נקודות א- רציפות קיימים הגבולות החד-צדדיים (הגבול הימני מסומן ב- $f(x+)$ והגבול השמאלי מסומן ב- $f(x-)$).

משפט 1 (של Dirichlet).

תהי $f(x), x\in[-l,l]$ פונקציה רציפה למקוטעין המקיימת את התנאים הבאים:

א) לכל $x\in[-l,l)$ הגבול הבאה (נגזרת ימנית) קיים וסופי:

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x+)}{h},$$

ב) לכל $x \in (-l,l]$ הגבול הבאה (נגזרת שמאלית) קיים וסופי:

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x-)}{h}.$$

אזי :

לכל $x \in (-l,l)$ הטור פורייה של $f(x)$ מתכנס לערך

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2}.$$

בקצוות הקטע $x=\pm l$ הטור פורייה של $f(x)$ מתכנס לערך

$$\frac{f((-l)+)+f(l-)}{2}.$$

בלי הוכחה.

במילים אחרות,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=\begin{cases}\dfrac{f(x-)+f(x+)}{2}, & x\in(-l,l)\\[2mm] \dfrac{f((-l)+)+f(l-)}{2}, & x=\pm l\end{cases} \qquad (8)$$

מסקנה 1.

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה וגזירה לכל $x\in[-l,l]$. אזי מתקיים:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)=f(x),\ x\in[-l,l]. \qquad (9)$$

דוגמה 3.

א) מצא את טור פורייה של הפונקציה הבאה בקטע $[-\pi,\pi]$:

$$f(x)=x,\ -\pi\le x\le\pi.$$

ב) על-ידי תוצאות של סעיף הקודם חשב את הסכום

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots.$$

פתרון.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi}=0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx \right) = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\left((-1)^n - (-1)^n\right)}{\pi n^2} = 0, n = 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{2\pi\cos n\pi}{\pi n} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, n = 1, 2, \ldots, .$$

על פי משפט 1 מקבלים:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \right) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}.$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1} - \frac{\sin\frac{2\pi}{2}}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{3} - \frac{\sin\frac{4\pi}{2}}{4} + \frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{5} - \frac{\sin\frac{6\pi}{2}}{6} + \frac{\sin\frac{7\pi}{2}}{7} - \ldots \right) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

מסקנה:

$$.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

2.2. פתוח לטורי פורייה של פונקציות מחזוריות

הגדרה 9 .

הפונקציה $f(x), x \in \mathbf{R}$ נקראת פונקציה מחזורית עם המחזור T, אם מתקיים:

$f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

תהי $f(x), x \in [-l,l]$ פונקציה רציפה למקוטעין המקיימת את התנאים את התנאים **א)** ו-**ב)** של משפט 1 הנ"ל.

נסמן:

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right), x \in [-l,l] \quad (10)$$

מכיוון ש- $\cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x$ מוגדרות לכל $x \in \mathbf{R}$ ומחזוריות עם המחזור $T = 2l$, הפונקציה $s(x)$ המוגדרת על-ידי (8), גם מוגדרת לכל $x \in \mathbf{R}$ ומחזוריות עם המחזור $T = 2l$.

אם להמשיך את הפונקציה $f(x)$ לכל $\mathbf{R}$ על-ידי התנאי $f(x+2l) = f(x)$ (לכל נקודת רציפות $x \in \mathbf{R}$), אזי על-ידי (7)-(8) ומשפט 1 אפשר לפתוח הפונקציה $f(x), x \in \mathbf{R}$ מחזורית עם המחזור $T = 2l$ לטור פורייה עבור כל $x \in \mathbf{R}$. על פי מחזוריות מתקיים: $f((-l)+0) = f(l+0)$. לכו ניתן לרשום את המשפט 1 עבור פונקציה $f(x), x \in \mathbf{R}$ מחזורית עם המחזור $T = 2l$ כך:

משפט 2.(של Dirichlet).

תהי $f(x), x \in \mathbf{R}$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2l$, רציפה למקוטעין בקטע $[-l,l]$ המקיימת את התנאים הבאים:

לכל $x \in \mathbf{R}$ הגבול הבאים קיים וסופיים:

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x+)}{h}, \lim_{h\to 0-}\frac{f(x+h)-f(x-)}{h} .$$

אזי :

לכל $x \in \mathbf{R}$ הטור פורייה של $f(x)$ מתכנס לערך

$$\frac{f(x-)+f(x+)}{2},$$

במילים אחרות,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}, x \in \mathbf{R} \quad (11)$$

מסקנה 2.

תהי $f(x), x \in \mathbf{R}$ פונקציה מחזורית עם מחזור $T = 2l$, ורציפה וגזירה לכל $x \in \mathbf{R}$. אזי מתקיים:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right) = f(x), x \in \mathbf{R} . \quad (12)$$

3. פתוח לטור פורייה של פונקציות זוגיות ופונקציות אי זוגיות.

3.1 תהי $f(x), x\in[-l,l]$ פונקציה זוגית, ז"א $f(-x)=f(x), x\in[-l,l]$. נחפש מקדמי פורייה של פונקציה זוגית.
על פי (6) מתקיים:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, n=0,1,2,...,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, n=1,2,...,$$
.

מתקיים: $f(x)$ זוגית ו- $\cos\frac{n\pi}{l}x$ פונקציה זוגית; כפל של שתי פונקציות זוגיות גם פונקציה זוגית. לכן $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ פונקציה זוגית, ו-

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, n=0,1,2,.... \qquad (13)$$

מתקיים: $f(x)$ זוגית ו- $\sin\frac{n\pi}{l}x$ פונקציה אי זוגית; כפל של פונקציות זוגיות בפונקציה אי זוגית הוא פונקציה אי זוגית. לכן $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ פונקציה אי זוגית, ו-

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=0, n=1,2,.... \qquad (14)$$

מ-(13) ו-(14) נובע, שפונקציה זוגית נפתחת לטור פורייה לפי קוסינוסים בלבד:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x, x\in[-l,l],$$

כאשר

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, n=0,1,2,....$$

3.2 תהי $f(x), x\in[-l,l]$ פונקציה אי זוגית, ז"א $f(-x)=-f(x), x\in[-l,l]$. נחפש מקדמי פורייה של פונקציה אי זוגית.
על פי (6) מתקיים:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, n=0,1,2,...,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, n=1,2,...,$$
.

מתקיים: $f\left(x\right)$ זוגית ו- $x\cos\frac{n\pi}{l}$ פונקציה אי זוגית; כפל של פונקציות אי זוגיות בפונקציה זוגית הוא פונקציה אי זוגית. לכן $f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}$ פונקציה זוגית, ו-

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=0,n=0,1,2,\ldots. \qquad (15)$$

מתקיים: $f\left(x\right)$ אי זוגית ו- $x\sin\frac{n\pi}{l}$ פונקציה אי זוגית; כפל של שתי פונקציה אי זוגיות הוא פונקציה זוגית. לכן $f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$ פונקציה זוגית, ו-

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{l}xdx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,n=1,2,\ldots. \qquad (16)$$

מ-(15) ו-(16) נובע, שפונקציה זוגית נפתחת לטור פורייה לפי סינוסים בלבד:

$$f\left(x\right)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,x\in\left[-l,l\right],$$

כאשר

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi}{l}xdx,n=1,2,\ldots.$$

דוגמה 4. מצא את טור פורייה לפונקציה הבאה :

$$f(x)=x^2,-\pi\le x\le\pi$$

פתרון.

$f(x)=x^2$ פונקציה זוגית, לכן $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\begin{vmatrix}u=x^2 & du=2xdx\\ dv=\cos nxdx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{x^2\sin nx}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right)=\begin{vmatrix}u_1=x & du_1=dx\\ dv_1=\sin nxdx & v_1=-\frac{\cos nx}{n}\end{vmatrix}=-\frac{4}{\pi n}\left(-\left.\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{4(-1)^n}{n^2}-\frac{4}{\pi n^3}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

על פי משפט 1 מקבלים:

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx=\begin{cases}x^2, & -\pi<x<\pi,\\ \pi^2, & x=\pm\pi\end{cases}\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2,-\pi\le x\le\pi.$$

תשובה:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx, -\pi \le x \le \pi.$$

עבור $x = \pi$ מקבלים:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos n\pi = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} (-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

מסקנה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. פתוח לטור פורייה של פונקציות מוגדרות בקטע $[a,b], a < b$.

משפט 3 .

אם $f(x), x \in \mathbf{R}$ היא פונקציה מחזורית אם המחזור T, אזי

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx, \forall a \in \mathbf{R}. \quad (17)$$

הוכחה.

מתקיים:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx, \forall a \in \mathbf{R}. \quad (18)$$

מכיוון שהפונקציה $f(x), x \in \mathbf{R}$ היא פונקציה מחזורית אם המחזור T, מתקיים $f(x+T) = f(x), x \in \mathbf{R}$.

מכאן –

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \left[x = T+t, dx = dt, x \in [T, a+T] \Leftrightarrow t \in [0,a]\right] = \int_0^a f(T+t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt. \quad (19)$$

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt$$

מציבים את (19) ל-(18) . מקבלים:

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx, \forall a \in \mathbf{R}.$$

מש"ל.

תהי אם $f(x), x \in \mathbf{R}$ פונקציה מחזורית אם המחזור $T = 2l$,

מכיוון שהפונקציות $\cos\frac{n\pi}{l}x, n = 0,1,2,..., \sin\frac{n\pi}{l}x, n = 1,2,...$ הן גם מחזוריות אם המחזור $2l$, מתקיים:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx \overset{a=-l}{=} \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx =$$
$$= \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx, n = 0,1,2,..., \forall a \in \mathbf{R};$$

(20)

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx \overset{a=-l}{=} \frac{1}{l}\int_{0}^{2l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx =$$
$$= \frac{1}{l}\int_{a}^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx, n = 1,2,..., \forall a \in \mathbf{R}.$$

מסקנה.

על ידי הנוסחאות (20) אפשר לפתוח לטור פורייה פונקציה מוגדרת בקטע $[a, a+2l], \forall a \in \mathbf{R}$.

עכשיו נתבונן בפונקציה $f(x), x \in [a,b]$. מתקיים:

$$b - a = 2l \Leftrightarrow b = a + 2l \Leftrightarrow [a,b] = a + 2l \Leftrightarrow l = \frac{b-a}{2}$$

אפשר להמשיך אותה לכל $\mathbf{R}$ בצורה מחזורית עם המחזור $T = 2l = b - a$. מצבים ל-(20) את $l = \frac{b-a}{2}$. מקבלים:

(21)

$$a_n == \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{2n\pi}{b-a}xdx, n = 0,1,2,..., \forall a \in \mathbf{R};$$
$$.$$
$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{2n\pi}{b-a}xdx, n = 1,2,..., \forall a \in \mathbf{R}.$$

מסקנה.

על ידי הנוסחאות (21) אפשר לפתוח לטור פורייה פונקציה מוגדרת בקטע $[a,b], \forall a,b \in \mathbf{R}$.

שאלה 1. מצא את טור פורייה של כל אחת מן הפונקציות הבאות בקטע $(-\pi,\pi)$:

(א) $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0,\\ 0, & 0<x<\pi,\end{cases}$ (ב) $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x<0,\\ 2x, & 0<x<\pi,\end{cases}$

(ג) $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x<0,\\ -2, & 0<x<\pi,\end{cases}$ (ד) $f(x)=\pi+x,\ -\pi<x<\pi$

(ה) $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0,\\ \sin x, & 0<x<\pi,\end{cases}$

שאלה 2. מצא את טור פורייה לפונקציות הבאות, $T=2\pi$:

(א) $f(x)=x^2,-\pi<x<\pi$ (ב) $f(x)=x|x|,-\pi<x<\pi$

שאלה 3. פתח את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $(0,\pi)$ לטור של קוסינוסים.

שאלה 4. פתח את הפונקציה $f(x)=\cos 2x$ בקטע $(0,\pi)$ לטור של סינוסים.

שאלה 5. מצא טור פורייה לפונקציה $f(x)=|x|$ בקטע $(-1,1)$.

שאלה 6. (א) פתח את הפונקציה $f(x)=\begin{cases}3, & \pi<x<4\pi\\ -1, & 4\pi\le x<5\pi\end{cases}$ לטור פוריה בקטע $(\pi,5\pi)$

(ב) נסמן ב- $s(x)$ את סכומו של טור פוריה שמצאת בסעיף (א). מהו ערך של $s(-2\pi)$? $s(\pi)$?

שאלה 7. פתח את הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1,\\ 2-x, & 1<x<2,\end{cases}$ בקטע $(0,2)$:

(א) לטור של קוסינוסים (ב) לטור של סינוסים

שאלה 8. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין ומחזורית עם מחזור 2π ויהי טור פוריה של הפונקציה בקטע $(-\pi,\pi)$ הוא $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. נגדיר פונקציה חדשה $g(x)$ כ- $g(x)=f(x+\pi)$ לכל $x\in\mathbf{R}$, ויהי טור פורייה לפונקציה החדשה בקטע $(-\pi,\pi)$ הוא $f(x)\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx+B_n\sin nx)$. בטא את A_n ו- B_n על ידי a_n ו- b_n.

פתרונות

1. א.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)dx=-\left.\frac{x^2}{2\pi}\right|_{-\pi}^{0}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nxdx=\begin{vmatrix}u=-x & du=-dx\\ dv=\cos nx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx\right)=-\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}=-\frac{1-\cos n\pi}{\pi n^2}=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nxdx=\begin{vmatrix}u=-x & du=-dx\\ dv=\sin nx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx\right)=\frac{\cos n\pi}{n}-\frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{(-1)^n}{n},$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

ב.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xdx+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\left.\frac{x^2}{2\pi}\right|_{-\pi}^{0}+\left.\frac{x^2}{\pi}\right|_{0}^{\pi}=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx=\begin{vmatrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos nx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+\left.\frac{2x\sin nx}{n}\right|_{0}^{\pi}-\frac{2}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+$$

$$+\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=\frac{1-\cos n\pi+2\cos n\pi-2}{\pi n^2}=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx=\begin{vmatrix}u=x & du=dx\\ dv=\sin nx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\left.\frac{x\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx-\left.\frac{2x\cos nx}{n}\right|_{0}^{\pi}-\frac{2}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx\right)=-\frac{\cos n\pi}{n}+$$

$$+\frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2\cos nx}{n}+\frac{2}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}=\frac{3(-1)^{n+1}}{n},$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{3(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

.ג

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-2)dx = \left.\frac{x}{\pi}\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{2x}{\pi}\right|_{0}^{\pi} = 1-2=-1,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-2)\cos nxdx = \frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{\pi n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-2)\sin nxdx = -\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1-\cos n\pi}{\pi n} + \frac{2\cos n\pi - 2}{\pi n} = \frac{3\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n},$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n}\sin nx.$$

.ד

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\pi x + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cos nxdx = \begin{vmatrix} u = \pi + x & du = dx \\ dv = \cos nx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(\pi + x)\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right) = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi + x)\cos nxdx = \begin{vmatrix} u = \pi + x & du = dx \\ dv = \sin nx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(\pi + x)\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right) = -\frac{2\cos n\pi}{n} - \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n},$$

$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

.ה

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin xdx = -\frac{\cos x}{\pi}\Bigg|_{0}^{\pi} = \frac{2}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos xdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos xdx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\sin 2xdx = -\frac{\cos 2x}{4\pi}\Bigg|_{0}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos nxdx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\Bigg|_{0}^{\pi} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\Bigg|_{0}^{\pi}\right) = -\frac{(-1)^{n+1} - 1}{2\pi(n+1)} + \frac{(-1)^{n-1} - 1}{2\pi(n-1)} =$$

$$= \frac{-(-1)^{n+1}(n-1) + (n-1) + (-1)^{n-1}(n+1) - (n+1)}{2\pi(n+1)(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1} - 1}{\pi(n+1)(n-1)},\ n \neq 1,$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\left.\frac{(2x-\sin 2x)}{4\pi}\right|_0^{\pi}=\frac{1}{2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(n-1)x-\cos(n+1)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right|_0^{\pi}-\left.\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right|_0^{\pi}\right)=0,\ n\neq 1,$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-1}{\pi(n+1)(n-1)}\cos nx+\frac{1}{2}\sin x.$$

2. א. $f(x)=x^2$ פונקציה זוגית לכן $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\left.\frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx dx=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\cos nx dx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{x^2\sin nx}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\sin nx dx\right)=\begin{vmatrix} u_1=x & du_1=dx \\ dv_1=\sin nx dx & v_1=-\frac{\cos nx}{n}\end{vmatrix}=-\frac{4}{\pi n}\left(-\left.\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right)=\frac{4(-1)^n}{n^2}-\left.\frac{4}{\pi n^3}\sin nx\right|_0^{\pi}=\frac{4(-1)^n}{n^2},$$

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

ב. $f(x)=|x|x$ פונקציה אי-זוגית לכן $a_n=0$ ועבור $x\geq 0$ $f(x)=x^2$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx dx=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\sin nx dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\left.\frac{x^2\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cos nx dx\right)=\begin{vmatrix} u_1=x & du_1=dx \\ dv_1=\cos nx dx & v_1=\frac{\sin nx}{n}\end{vmatrix}=-\frac{2\pi(-1)^n}{n}+$$

$$+\frac{4}{\pi n}\left(\left.\frac{x\sin nx}{n}\right|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx\right)=\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}+\left.\frac{4}{\pi n^3}\cos nx\right|_0^{\pi}=\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}+\frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^3},$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}+\frac{4((-1)^n-1)}{\pi n^3}\right)\sin nx.$$

.3

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{\pi}\bigg|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx \right) = \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2},$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{\pi n^2}\cos nx.$$

.4

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+2)x + \sin(n-2)x\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n+2)x}{n+2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(n-2)x}{n-2} \right)\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^{n+2} - 1}{n+2} - \frac{(-1)^{n-2} - 1}{n-2} \right) = \frac{2n\left(1 - (-1)^n\right)}{\pi(n+2)(n-2)},\ n \ne 2,$$

$$b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2x\sin 2x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 4x dx = -\frac{1}{4\pi}\cos 4x\Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_{2k} = 0,\ b_{2k-1} = \frac{4(2k-1)}{\pi(2k+1)(2k-3)},$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(2k-1)}{\pi(2k+1)(2k-3)}\sin(2k-1)x.$$

.5

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)dx = 2\int_0^{1} x dx = x^2\Big|_0^1 = 1,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 2\int_0^{1} x\cos n\pi x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos n\pi x dx & v = \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(x\sin n\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin n\pi x dx \right) = \frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1 = \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi^2},$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x.$$

.6

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{5\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{4\pi}3dx+\frac{1}{2\pi}\int_{4\pi}^{5\pi}(-1)dx=4,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{5\pi}f(x)\cos\frac{nx}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{4\pi}3\cos\frac{nx}{2}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{4\pi}^{5\pi}(-1)\cos\frac{nx}{2}dx=\frac{3}{n\pi}\sin\frac{nx}{2}\bigg|_{\pi}^{4\pi}-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{nx}{2}\bigg|_{4\pi}^{5\pi}=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{\lambda}^{\lambda+2l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{5\pi}f(x)\sin\frac{nx}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{4\pi}3\sin\frac{nx}{2}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{4\pi}^{5\pi}(-1)\sin\frac{nx}{2}dx=-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{nx}{2}\bigg|_{\pi}^{4\pi}+\frac{1}{n\pi}\cos\frac{nx}{2}\bigg|_{4\pi}^{5\pi}=$$

$$=-\frac{3}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)+\frac{1}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right)=\frac{4}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-1\right),$$

$$f(x)=2-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{nx}{2}+\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{nx}{2}\right)=$$

$$=2-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{n(\pi-x)}{2}+\sin\frac{nx}{2}\right),$$

$$s(-2\pi)=s(2\pi)=3=2-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$s(\pi)=\frac{1}{2}\left(f(\pi-)+f(\pi+)\right)=\frac{-1+3}{2}=1=2-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

.7 א.

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\int_0^1 xdx+\int_1^2(2-x)dx=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^2=\frac{1}{2}+(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=1,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{matrix}u=x & du=dx\\ u=2-x & du=-dx\\ dv=\cos\frac{n\pi x}{2}dx & v=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\end{matrix}\right|$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(x\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1-\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}dx+(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2+\int_1^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=\frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^1-\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_1^2\right)=\frac{4}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-1-\cos n\pi\right)=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2}-1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0\,, & n=4k,\\ 0\,, & n=4k+1,\\ -\dfrac{16}{(4k+2)^2\pi^2}\,, & n=4k+2,\\ 0\,, & n=4k+3,\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+2)^2}\cos\frac{(4k+2)\pi x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}.$$

ב.

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_1^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\left|\begin{array}{cc} u=x & du=dx\\ u=2-x & du=-dx\\ dv=\sin\dfrac{n\pi x}{2}dx & v=-\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{2}\end{array}\right|$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left(x\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}dx+(2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2+\int_1^2\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=-\frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1-\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2\right)=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \dfrac{8(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2\pi^2}\,, & n=2k-1,\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}.$$

.8

$$g(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos nx+B_n\sin nx\right),$$

$$g(x)=f(x+\pi)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n(x+\pi)+b_n\sin n(x+\pi)\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(a_n\cos nx+\right.$$

$$\left.+b_n\sin nx\right),$$

$$\cos n(x+\pi)=\cos nx\cos n\pi-\sin nx\sin n\pi=(-1)^n\cos nx,$$

$$\sin n(x+\pi)=\sin nx\cos n\pi+\cos nx\sin n\pi=(-1)^n\sin nx,$$

$$A_n=(-1)^n a_n,B_n=(-1)^n b_n.$$